RESUMEN TEORIA MATEMATICAS 5

LIMITES

Definición. Sea $f: R^2 \to R$,

$$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} f(x,y) = L$$

Significa que cuando (x, y) esta cerca de $(\bar{x}, \bar{y})$ entonces $f(x, y)$ esta cerca de L. De otra forma se dice que (x, y) pertenece a una bola centrada en $(\bar{x}, \bar{y})$ por otro lado, $\forall \varepsilon \; \exists \; r$ tal que $(x, y) \in B_r(\bar{x}, \bar{y}) \; => \; |f(x, y,) - L| < \varepsilon \;\; y \;\; (x, y) \neq (\bar{x}, \bar{y})$.

NOTA: Denotamos r como δ ya que en el plano 2D el conjunto cercano a un punto ya no es un intervalo sino un circulo de radio r y en el espacio 3D el conjunto cercano a un punto es una esfera de radio r. Puede Uds. usar $\delta \; o \; r$. Denotamos $B_r(\bar{x}, \bar{y})$ como la bola de radio r centrada en $(\bar{x}, \bar{y})$

COMO USAR LA DEFINICION DE LÍMITES.

1.- Utilizamos caminos, se recomienda ante todo rectas $y = m(x - x_0) + y_0$ siendo (x_0, y_0) el punto a donde se quiere determinar el límite.

i.- Si el límite a lo largo de la recta depende de la pendiente (m) entonces NO EXISTE.

ii.- El limite a lo largo de la recta no depende de (m). Produce un mismo valor L. entonces este valor será el candidato para usar la definición de limite.

IMPORTANTE. Este valor L va a ser el único valor posible del límite f cuando $(x, y) \to (\bar{x}, \bar{y})$.

2.- Calculamos $|f(x, y) - L|$ tomando una bola con $r > 0$ y $B_r(\bar{x}, \bar{y})$ en esta bola tratamos de acotar en función de ε. Podemos usar para acotar $|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})| < r$ significa que la distancia entre los puntos es menor que el radio, esto se traduce a varios casos.

i.- $\sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2} < r \quad =>$ luego cota superior será (r)

ii.- $(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 < r^2 \quad => \; para \begin{cases} y = \bar{y} \;\; => \;\; (x - \bar{x})^2 < r^2 \\ x = \bar{x} \;\; => \;\; (y - \bar{y})^2 < r^2 \end{cases}$

I.- Si tenemos éxitos en acotar la función, es decir $|f(x, y) - L| < M(r) < \varepsilon \; => \; r < h(\varepsilon)$

Se cumple la definición y el límite existe.

II.- Si no logramos acotar la función. Entonces probemos con otro camino (segunda opción Parabolas $y = mx^2$) si el limite resulta ser diferente luego el limite no existe. Ya que dicho valor debe ser único para cualquier trayectoria.

CONTINUIDAD.

Definición.

Se dice que f es continua en R^2 $(\bar{x}, \bar{y})$ si y solo si

$$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} f(x,y) = f(\bar{x},\bar{y})$$

DERIVADAS PARCIALES.

Sea $f: R^2 \to R$ si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a}$$

Existe, su valor se llama derivada parcial de f con respecto a x, de manera análoga se cumple con y.

Se puede escribir de otra forma.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \qquad respecto\ x$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \qquad respecto\ y$$

DIFERENCIABILIDAD.

Se debe cumplir el siguiente límite, para que la función ser diferenciable.

$$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} \frac{\left| f(x,y) - f(x_0,y_0) - \langle \nabla f(x_0,y_0), \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \rangle \right|}{\| f(x,y) \|} = 0$$

DERIVADAS DIRECCIONALES.

Si $f: R^3 \to R$ es diferenciable entonces todas las derivadas direccionales existen y se cumple

$$D(f(x), U) = \nabla f(x).U$$

GRADIENTE.

Se define el gradiente de una función de R^2 como.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR.

Se denomina a las derivadas de orden superior a las siguientes derivadas.

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \;;\; \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

Se crean una nuevas, que se denominan derivadas cruzadas.

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \;;\; \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

Entiéndase como derivar la función $f(x,y)$ primero con respecto la variable y y luego con x, para el primer caso.

PLANO TANGENTE.

Para determinar la ecuación del plano tangente se divide en dos casos.

CURVA DE NIVEL

$$\left\{ (x,y,z) \;/\; \left\langle \nabla f(x_p, y_p), \begin{pmatrix} x - x_p \\ y - y_p \end{pmatrix} \right\rangle = z - z_p \right\}$$

SUPERFICIE.

$$\left\{ (x,y,z) \;/\; \left\langle \nabla f(x_p, y_p, z_p), \begin{pmatrix} x - x_p \\ y - y_p \\ z - z_p \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

SERIE DE TAYLOR.

$$f(x,y) = f(\bar{x},\bar{y}) + \left\langle \nabla f(\bar{x},\bar{y}), \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \frac{H(\bar{x},\bar{y}).\begin{pmatrix} x-\bar{x} \\ y-\bar{y} \end{pmatrix}}{2}, \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Donde definimos $H(\bar{x},\bar{y})$ como la **HESSIANA** dada por

$$H(\bar{x},\bar{y})=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) \end{pmatrix}$$

Se debe cumplir que

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

TEORIA MAXIMOS Y MINIMOS LOCALES DE f.

1.- Puntos Críticos, se debe cumplir que

$$\nabla f(\bar{x},\bar{y})=(0,0)$$

i.- Si $\langle H(\bar{x},\bar{y}).d,d\rangle > 0,\ \forall d \in R^2-(0,0)$ => en $(\bar{x},\bar{y})$ f tiene un mínimo local.

ii.- Si $\langle H(\bar{x},\bar{y}).d,d\rangle < 0,\ \forall d \in R^2-(0,0)$ => en $(\bar{x},\bar{y})$ f tiene un máximo local.

iii.- Si $\langle H(\bar{x},\bar{y}).d,d\rangle > 0\ \ y\ \ \langle H(\bar{x},\bar{y}).\hat{d},\hat{d}\rangle < 0$ => $(\bar{x},\bar{y})$ es un punto silla de f. (Inflexión)

OTRO METODO.

i.- Si $\det\big(H(\bar{x},\bar{y})\big) < 0$ entonces en $(\bar{x},\bar{y})$ es un punto silla.

ii.- Si $\det\big(H(\bar{x},\bar{y})\big) > 0$ y el primer termino de la matriz es

I.- $a_{11} > 0$ en $(\bar{x},\bar{y})$ f tiene un MINIMO.

II.- $a_{11} < 0$ en $(\bar{x},\bar{y})$ f tiene una MAXIMO.

iii.- Si $\det\big(H(\bar{x},\bar{y})\big) = 0$ NO concluyo.

MAXIMOS Y MINIMOS GLOBALES.

i.- Obtener puntos críticos de f tal que

$$\nabla f(x,y)=(0,0)$$

Se elimina lo que no están en interior del Dominio D.

Evaluamos en f.

ii.- En la frontera, buscamos máximos o mínimos de f.

Evaluamos.

iii.- Comparamos los valores y decidir cuáles son los máximos y mínimos globales.

METODO DE COEFICIENTES DE LAGRANGE.

i.- Ante todo parametrizamos la frontera, en termino de trigonometría o bien sea funciones polinómicas sencillas.

ii.- Usamos el método de multiplicadores de LaGrange, se tiene que si $g(x, y)$ es la frontera de la función $f(x, y)$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \, \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

INTEGRALES.

Importante.

Cuando se parametriza un curva σ_t se tiene su propia su propia orientación.

INTEGRALES DE TRAYECTORIA.

Sea $f: R^n \to R$; $\sigma(a,b) \to R^n \qquad (a,b) \to R^n \to R$

Definimos la integral de la función f sobre la trayectoria sigma como

$$\int_a^b f(\sigma\,(t)) \left\|\frac{d\sigma(t)}{dt}\right\| dt$$

INTEGRAL DE LINEA.

Sea $f: R^n \to R^n$; $\sigma: (a,b) \to R^n$; $f\big(\sigma(t)\big) \in R^n \;\; y \;\; \frac{d\sigma(t)}{dt} \in R^n$

Definimos la integral de la función f sobre sigma.

$$\int_a^b \langle f\big(\sigma(t)\big), \frac{d\sigma(t)}{dt} \rangle\, dt$$

TEOREMA DE GREEN.

Si P y Q son C^1 en frontera D entonces

$$\int_{frontera\ D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Para la orientación de Green. Se sigue el siguiente método. AL CAMINAR SOBRE LA FRONTERA EL ESPACIO (D) DEBE ESTAR A SU IZQUIERDA.

TEOREMA: CAMBIO DE VARIABLE.

Sea el cambio $T: R^2 \to R^2$: $T = \binom{h1}{h2}$; $\binom{x}{y} = T\left(\binom{u}{v}\right)$; $D = T(D^*)$

Si T es C^1 y es inyectiva (al menos en D^*) entonces

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f\big(h1(u,v), h2(u,v)\big) jacobiano\ du\ dv$$

Se define el jacobiano como

$$Jacobiano = \left| \det\left(\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h1}{\partial x} & \dfrac{\partial h1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial h2}{\partial x} & \dfrac{\partial h2}{\partial y} \end{pmatrix} \right) \right|$$

COORDENADAS POLARES.

Sea el cambio de variable

$$T = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

El jacobiano del cambio será

$$jacobiano = r$$

.- Se debe determinar los intervalos donde se define $r\ y\ \theta$.

INTEGRALES TRIPLE.

Def:

$$\iiint_P f(x,y,z)dxdydz$$

FUBINI.

Cuando la región a integrar sea un CUADRADO el orden de integración puede ser cualquiera, es decir, la primera variable a integrar puede ser cualquiera.

INTEGRACION TRIPLE.

Sea $\Omega \subset R^3$

Para calcular la integral triple en Ω primero debemos dibujar Ω, luego se escoge la primera variable, debemos considerar la $proy_{\Omega}$ donde se calcula $\iint_D$ por lo cual la primera variable será la que NO está en el plano.

CAMBIO DE VARIABLE.

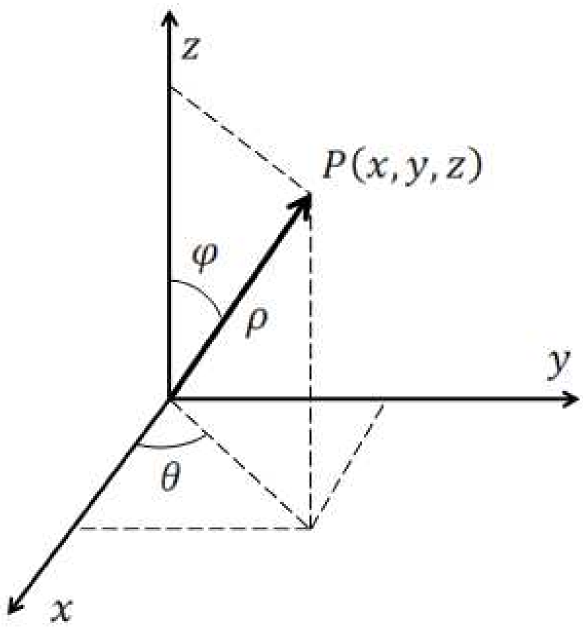
Coordenadas cilíndricas equivale a las coordenadas polares en la proyección de Ω.

COORDENADAS ESFERICAS

Sea el cambio de variable.

$$T = \begin{pmatrix} x = \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = \rho \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

El jacobiano es $\rho^2 \sin(\varphi)$



Es importante notar el intervalo de las nuevas variables, para ello vea la figura y tome en cuenta la región dada. Phi es el ángulo con respecto al eje z, theta con respecto a el eje x y rho es la longitud del centro al punto P.